

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Číslo projektu	CZ.1.07/1.1.36/02.0066
Autor	Ladislav Kašpárek
Předmět	Programovací metody
Téma	Numerické řešení rovnic
Metodický pokyn	výkladový text s ukázkami, experimentální dokument

Numerické řešení rovnic – metody

Znalost metod řešení rovnic je vhodná pro volbu, kterou metodu použít pro výpočet konkrétní rovnice. Např. nejrychlejší metoda sečen nejde použít vždy! Kde to nejde musíme použít metodu jinou. V této kapitole si ukážeme tři metody řešení rovnic numerickými postupy. Budeme postupovat od nejjednodušší, na které bude vidět vše snadno a pak metody zefektivníme. Naším úkolem bude najít řešení rovnice: $-x^2 + 6x - 6 = 0$ v intervalu $\langle 1; 4 \rangle$.

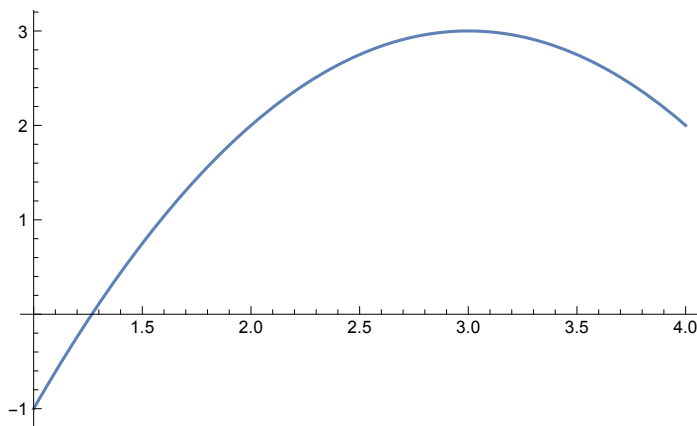
V tomto případě lze snadno najít i algebraické řešení, které nám poslouží pro kontrolu numerického výpočtu:

```
Solve[-x^2 + 6 x - 6 == 0, x]
{{x -> 3 - Sqrt[3]}, {x -> 3 + Sqrt[3]}}
```

```
NSolve[-x^2 + 6 x - 6 == 0, x]
{{x -> 1.26795}, {x -> 4.73205}}
```

Pro naše zadání je přípustné řešení jen jedno $x \rightarrow 1.26795$.

```
Plot[-x^2 + 6 x - 6, {x, 1, 4}]
```



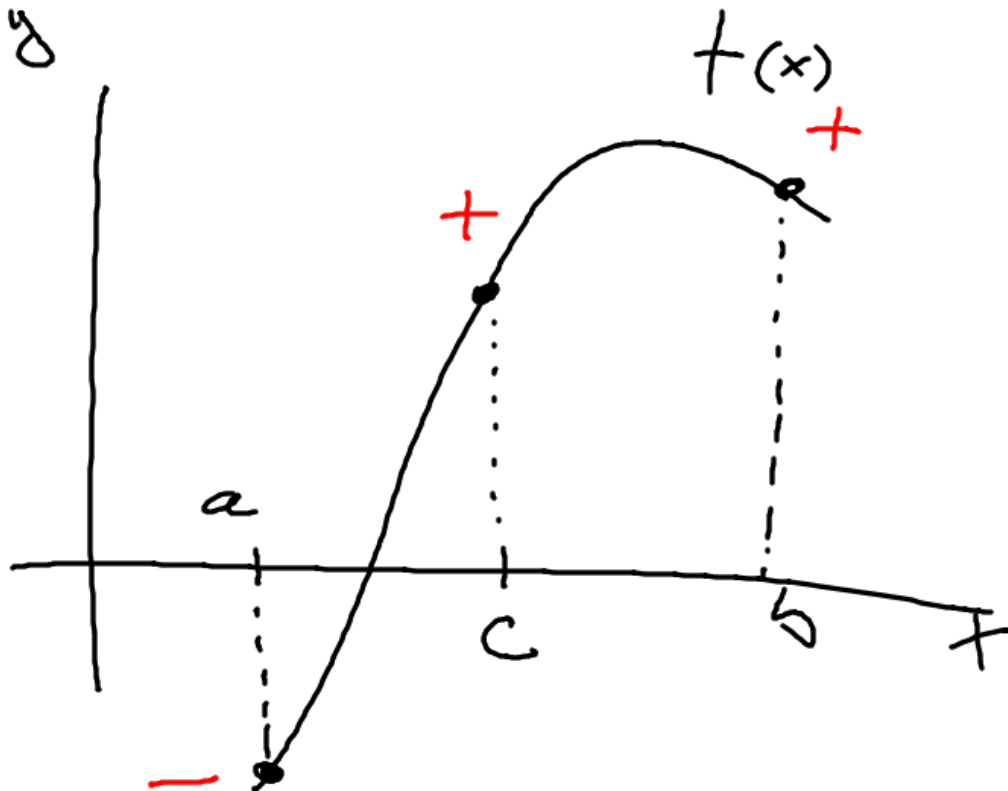
Grafické znázornění průběhu funkce a jeho průsečík s osou x.

Pro to, abychom úspěšně našli kořen musí být splněno několik podmínek:

* funkce musí být na intervalu $\langle a; b \rangle$ spojitá

Pokud je podmínka splněna pak jsme našli (alespoň přibližně) kořen. Pokud jsme kořen nenašli, musíme rozhodnout ve kterém intervalu budeme ve výpočtu pokračovat. Intervaly jsou dva: $\langle a, c_1 \rangle$ a $\langle c_1, b \rangle$.

K tomuto rozhodnutí potřebujeme znát hodnoty: $f(a)$, $f(c_1)$, $f(b)$. Vyštríme jejich znaménka, podle následujícího obrázku:



Z obrázku je vidět, že kořen se nachází v intervalu $\langle a, c \rangle$ a tam je součin $f(a) \cdot f(c)$ menší než nula (záporný). V druhém intervalu je součin funkčních hodnot kladný.

Odůvodni toto kritérium i na funkci, která je symetrická podle osy x .

Výpočet opakujme tak dlouho dokud nenalezneme kořen. Kód v jazyce java:

```
public class PuleniIntervalu {

    public static double fce(double x) {
        return x*x-2;
    }

    public static void main(String[] args) {

        double a,b,c;
        final double EPSILON = 0.001;

        a = 0.1;
        b = 2.2;
        c = (a+b)/2;
```

```

while ( Math.abs(fce(c)) > EPSILON ) {

    System.out.println(a + " " + b);
    if (fce(a)*fce(c)<0) {b=c;}
    else {a=c;}

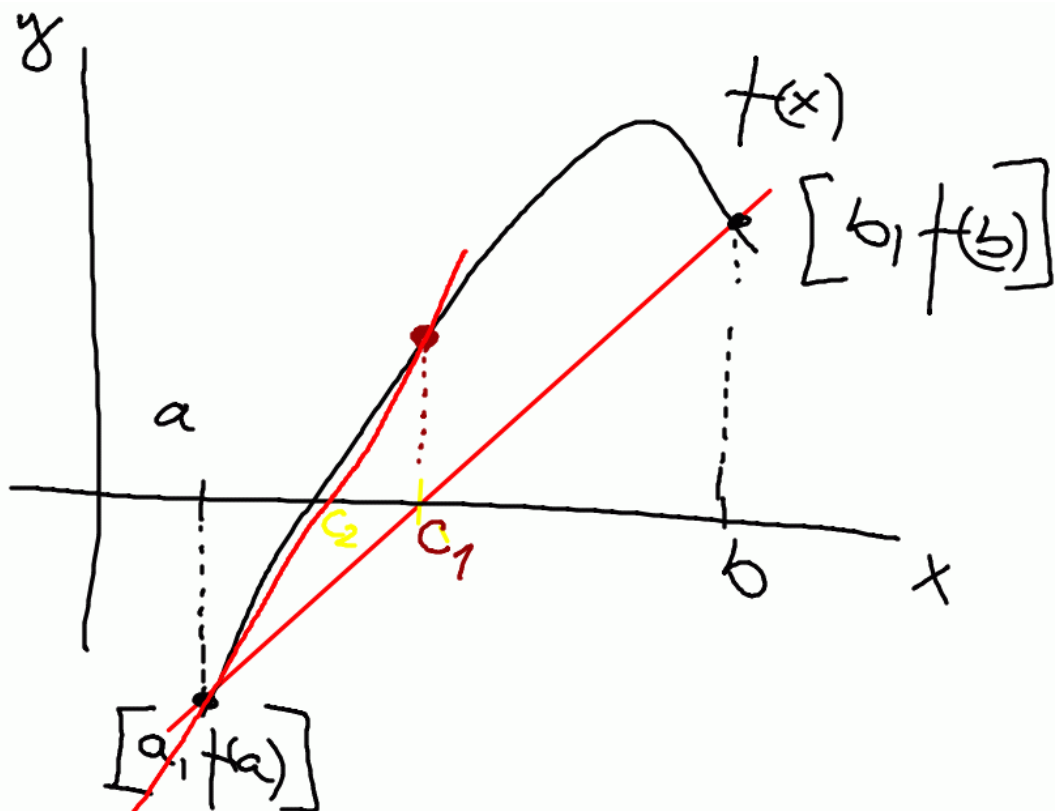
    c = (a+b)/2;
}
System.out.println(c);
}
}

```

Metoda sečen

Druhá metoda která se reálně používá pro výpočty (používá ji i funkce FindRoot v systému Mathematica), je zpravidla rychlejší než půlení intervalu.

Základní myšlenka je založena na tom, že funkci $f(x)$ nahradíme přímkou, která někde protne osu x a tam předpokládáme kořen. Pokud tam není, postup se opakuje.



Výhodou tohoto přístupu je že metoda při výpočtu bere v úvahu jak funkce vypadá, snaží se její průběh respektovat, ukazuje se že je to výhodné. Narozdíl od půlení intervalu.

Obtížnější je určit obecně kde přímka osu x protne. Roční odvození vzorce vyžaduje řadu algebraických úprav, nám však pomůže WM. Odvození proběhne ve dvou krocích:

- * nalezení rovnice funkce přímky, která prochází body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$.
- * vyřešení příslušné lineární rovnice.

InterpolatingPolynomial [{a, f[a]}, {b, f[b]}], x]

$$f[a] + \frac{(-a+x)(-f[a]+f[b])}{-a+b}$$

$$\text{Solve}\left[f[a] + \frac{(-a+x)(-f[a]+f[b])}{-a+b} = 0, x\right]$$

$$\left\{\left\{x \rightarrow \frac{b f[a] - a f[b]}{f[a] - f[b]}\right\}\right\}$$

Vztah pro průsečík přímky s osou x je:

$$c = \frac{b f[a] - a f[b]}{f[a] - f[b]}$$

Výpočet opakujeme tak dlouho dokud nenalezneme kořen. Kód v jazyce java:

```
public class MetodaSecen {

    private static double f(double x) {
        return x*x - 2;
    }

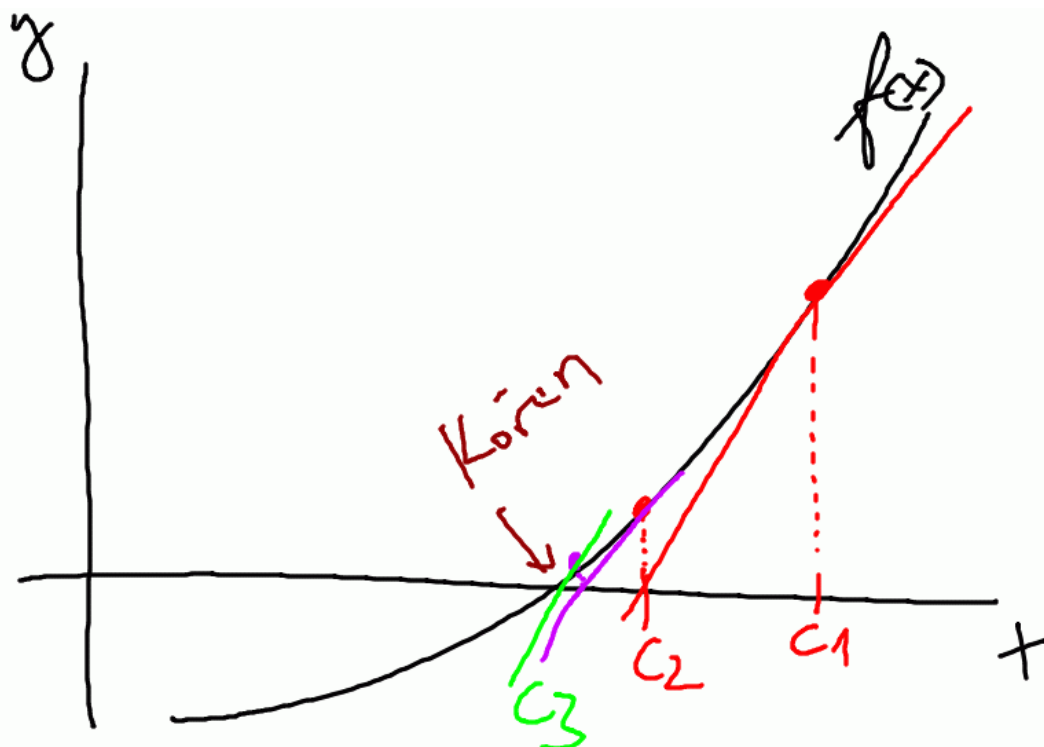
    private static double rootSecna(double a, double b, double eps) {
        double l = a;
        double r = b;
        double c = 1 - ((f(l)*(1-r))/(f(l)-f(r)));

        while ( Math.abs( f(c) ) >= eps ) {
            if ( (f(l) * f(c))>0 ) {l=c;}
            else {r=c;}
            c=1-((f(l)*(1-r))/(f(l)-f(r)));
        }
        return c;
    }

    public static void main(String[] args) {
        System.out.print( rootSecna(1, 1.5, 0.0000001) );
    }
}
```

Newtonova metoda tečen

Tato metoda patří mezi nejefektivnější, ovšem pokud jsou splněny poměrně silné a omezující podmínky: funkce musí být spojitá a "hladká". Hladkou funkcí se rozumí (intuitivně), že je funkce monotonní a konvexní nebo konkávní v okolí svého kořene a v tomto okolí je i počáteční bod. Pro metodu se nezadává interval, ale jen počáteční bod, viz obrázek:



Počáteční bod na obrázku je bod c_1 v tomto bodě se sestrojí tečna k funkci $f(x)$. Průsečík tečny a osy x je bod c_2 atd. Výpočet pokračuje dokud není nalezen kořen. Další nevýhodou metody je, že k výpočtu tečny je nutné znát první derivaci funkce.

Pokud nejsou splněny podmínky na hladkost, může se algoritmus zacyklit nebo “divergovat” - utéct od kořene. Proto se metodě také nastavuje maximální počet iterací (kroků), které má pro výpočet provést.

Pro výpočet dalšího průsečíku tečny s osou x platí vztah:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Zde je vidět i použití první derivace funkce, ta se zadá buď přímo, nebo se musí numericky vypočítat, ale to není snadné a přesahuje to naše možnosti.

Prostudujte si dokumentaci k funkci FindRoot.

Shrnutí

Ukázali jsme tři metody řešení rovnic, žádná z nich není ideální, mají své výhody a nevýhody. Proto je důležité znát jak fungují, abychom mohli pro danou úlohu-rovnici efektivně vyřešit.

Sbírka úloh

1/ Vypočtete $\sqrt{2}$ na pět desetinných míst oběma metodami. $N[\sqrt{2}, 5]$

2/ Vyřešte rovnici $\ln x = -x$ na pět desetinných míst. Zvolte metodu i interval řešení, výsledek porovnejte s výsledkem funkce FindRoot.

3/ Vyřešte rovnice $\ln x = \sin x$, $x^5 - 2x^2 + x + 3 = 0$ na pět desetinných míst. Zvolte metodu i inter-

val řešení, výsledek porovnejte s výsledkem funkce FindRoot.

4/ Prostudujte si dokumentaci k funkci FindRoot.

5/ Najděte rovnice nevhodné pro metody sečen a tečen.

Zdroje

http://absolventi.gymcheb.cz/2010/annguy/oktava/Metoda_secen.html

http://cs.wikipedia.org/wiki/Metoda_se%C4%8Den

http://www.kvd.zcu.cz/cz/materialy/numet/_numet.html

<http://reference.wolfram.com/language/ref/FindRoot.html>