

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Číslo projektu	CZ.1.07/1.1.36/02.0066
Autor	Ladislav Kašpárek
Předmět	Programovací metody
Téma	Ukázka aproximace
Metodický pokyn	výkladový text s ukázkami, experimentální dokument

Ukázka aproximace

Tento dokument ukazuje reálnou úlohu-situaci, kdy máme za úkol najít křivku-charakteristiku unipolárního tranzistoru z naměřených hodnot. Ačkoliv se nabízí použití interpolačního polynomu, zjistíme, že křivky se moc vlní a tedy nedostačně vystihují charakteristiku fototranzistoru. Použití jiných funkcí pro interpolaci je výpočetně náročné a výsledky nebudou o moc lepší.

Experimentujte se zadáním naměřených hodnot a interpolacemi.

Aproximace poskytuje další prostor pro hledání charakteristik při zachování rozumné přesnosti.

Fototranzistor

Unipolární fototranzistor při různých intenzitách osvětlení. Naměřeno:

$P_1 = \{\{0, 0\}, \{1, 5\}, \{2, 8.8\}, \{3, 12.1\}, \{4, 15.7\}, \{5, 18.8\}\}$

$\{\{0, 0\}, \{1, 5\}, \{2, 8.8\}, \{3, 12.1\}, \{4, 15.7\}, \{5, 18.8\}\}$

$P_2 = \{\{0, 0\}, \{1, 53\}, \{2, 55\}, \{3, 63\}, \{4, 69\}, \{5, 75\}\}$

$\{\{0, 0\}, \{1, 53\}, \{2, 55\}, \{3, 63\}, \{4, 69\}, \{5, 75\}\}$

$P_3 = \{\{0, 0\}, \{1, 193\}, \{2, 210\}, \{3, 230\}, \{4, 250\}, \{5, 260\}\}$

$\{\{0, 0\}, \{1, 193\}, \{2, 210\}, \{3, 230\}, \{4, 250\}, \{5, 260\}\}$

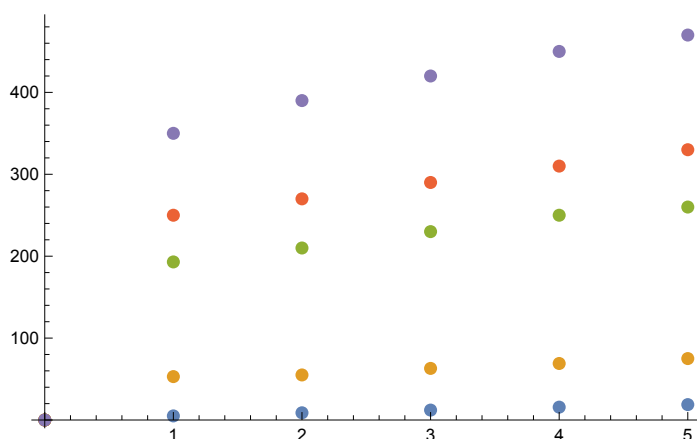
$P_4 = \{\{0, 0\}, \{1, 250\}, \{2, 270\}, \{3, 290\}, \{4, 310\}, \{5, 330\}\}$

$\{\{0, 0\}, \{1, 250\}, \{2, 270\}, \{3, 290\}, \{4, 310\}, \{5, 330\}\}$

$P_5 = \{\{0, 0\}, \{1, 350\}, \{2, 390\}, \{3, 420\}, \{4, 450\}, \{5, 470\}\}$

$\{\{0, 0\}, \{1, 350\}, \{2, 390\}, \{3, 420\}, \{4, 450\}, \{5, 470\}\}$

```
ListPlot[Table[Pn, {n, 1, 5}]]
```



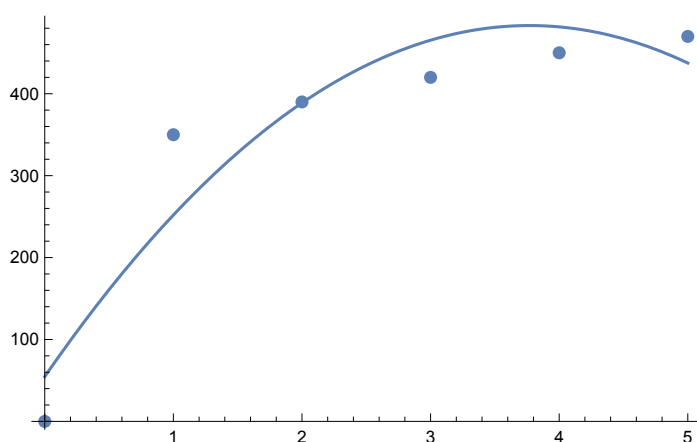
Aproximace kvadratickým polynomem

Pokusme se množinu bodů P_5 aproximovat kvadratickou funkcí (upouštíme od požadavku, aby výsledná křivka procházela danými body a použijeme metodu nejmenších čtverců).

```
f = Fit[P5, {1, x, x2}, x]
```

```
54.6429 + 227.464 x - 30.1786 x2
```

```
Show[{ListPlot[P5], Plot[f, {x, 0, 5}]]
```



Závěr: výsledek není příliš uspokojivý! Je nutné hledat "širší" bázi funkcí, která by se lépe přiblížila zadaným bodům.

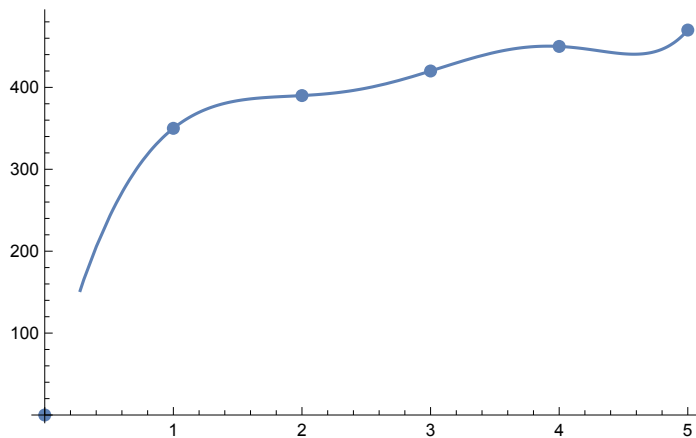
Aproximace polynomem vyššího stupně

Přidejme polynomy vyšších stupňů, v ukázce je použit stupeň 7.

```
f = Fit[P5, Table[xi, {i, 0, 7}], x]
```

```
5.11036 × 10-13 + 652.6 x - 378.433 x2 + 71.9694 x3 +  
5.9839 x4 - 1.82488 x5 - 0.363841 x6 + 0.0680893 x7
```

```
Show[{ListPlot[P5], Plot[f, {x, 0, 5}]]]
```

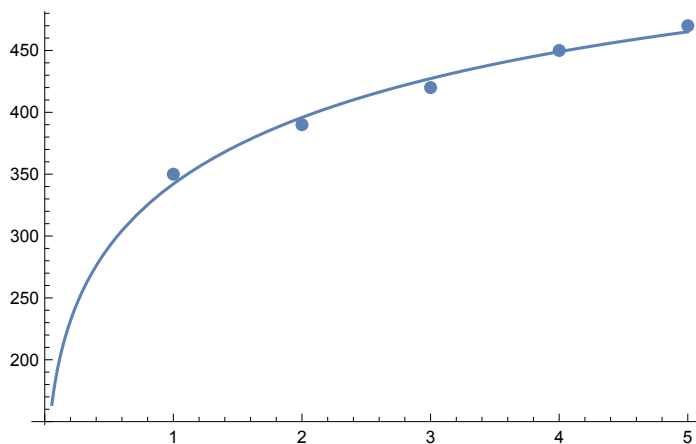


Nevhodná funkce pro náš případ! Sice se křiva přiblížila k bodům dostatečně blízko (nejmenší čtverce budou opravdu malé), ale z hlediska charakteristiky fototranzistoru je nevhodná (není pouze rostoucí a konkávní).

Hledání lepší báze funkcí – odmocniny

Rostoucí, hladký a konkávní průběh nabízí odmocniny.

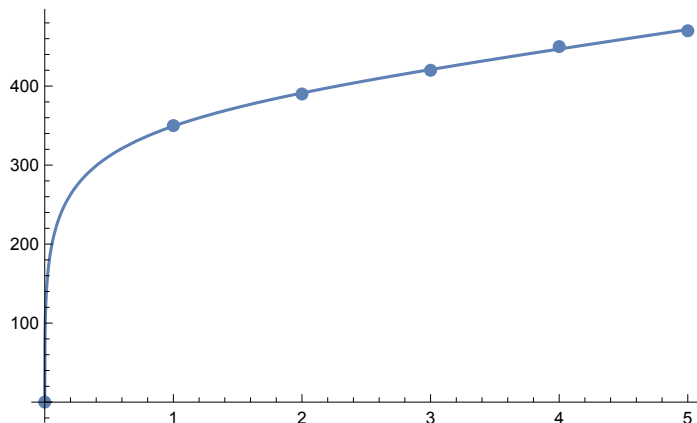
```
f = Fit[P5, {1,  $\sqrt{x}$ ,  $x^{\frac{1}{3}}$ }, x]; Show[{Plot[f, {x, 0, 5}], ListPlot[P5]}]
```



```
f = Fit[P5, Prepend[Table[x $\frac{1}{i}$ , {i, 3}], 1], x]; ? f;
Show[{Plot[f, {x, 0, 5}, AxesOrigin -> {0, 0}], ListPlot[P5]}]
```

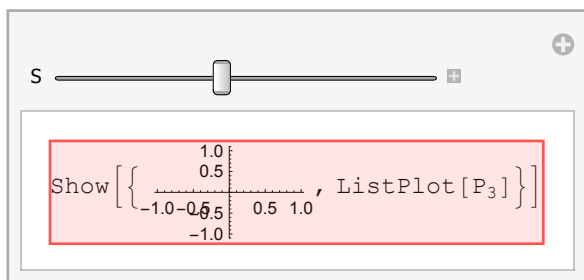
Global`f

$$f = 0.0176863 + 869.026 x^{1/3} - 573.089 \sqrt{x} + 53.395 x$$



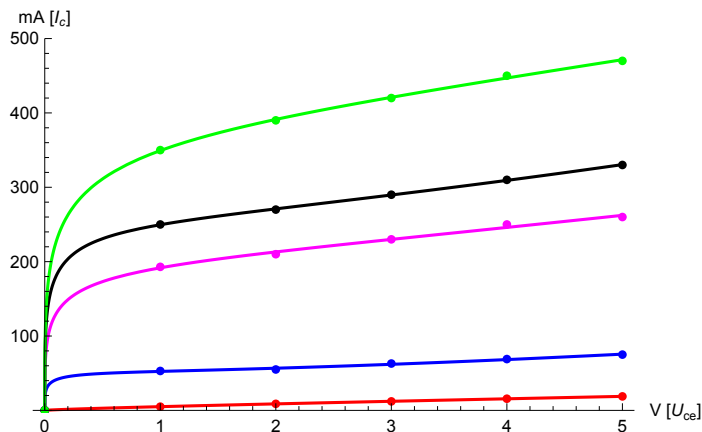
Experimentujte se “stupněm” odmocnin a najděte nejvhodnější:

```
Manipulate[f = Fit[P3, Prepend[Table[x1/i, {i, S}], 1], x];
Show[{Plot[f, {x, 0, 5}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> Automatic],
ListPlot[P3]}], {{S, 3}, 0, 7, 1}]
```



Závěr: odmocninový polynom stupně 3

```
barva = {Red, Blue, Magenta, Black, Green};
Show[ (f = Fit[P#, Prepend[Table[x^i, {i, 3}], 1], x];
      Show[Plot[f, {x, 0, 5}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> {0, 500},
            PlotStyle -> barva[[#]], AxesLabel -> {"V [Uce]", "mA [Ic]}],
      ListPlot[P#, PlotRange -> {0, 500},
            PlotStyle -> {barva[[#]], PointSize[Medium]}]] & /@ {1, 2, 3, 4, 5}
```



```
(Fit[P#, Prepend[Table[x^i, {i, 3}], 1], x]) & /@ {1, 2, 3, 4, 5} // TableForm
```

$0.000018632 - 1.01588 x^{1/3} + 3.4509 \sqrt{x} + 2.57226 x$
$0.0131926 + 201.105 x^{1/3} - 171.957 \sqrt{x} + 23.2455 x$
$0.0323613 + 532.087 x^{1/3} - 381.517 \sqrt{x} + 41.0962 x$
$0.00851415 + 790.189 x^{1/3} - 608.585 \sqrt{x} + 68.023 x$
$0.0176863 + 869.026 x^{1/3} - 573.089 \sqrt{x} + 53.395 x$

Shrnutí

Hledali jsme a našli velmi dobrou funkci pro charakteristiku fototranzistoru. Použili jsme aproximační metody (upustili jsme od požadavku, aby křivka procházela zadanými body, ale aby se jim co nejvíce přiblížila). Úvahy nás dovedly až k bázi funkcí založených na odmocninách.

Sbírka úloh

1/ Vymysli si 10 různých bodů v rovině a pak je aproximuj přímkou. Sleduj vlastnosti přímky (klesá, roste a jak strmě, najdi průsečíky s osami).

2/ Aproximuj přímkou následujících 100 bodů v rovině:

```
SeedRandom[12345]; Table[{n, n/10 + RandomReal[{-2, 2}]}, {n, 100}], popiš výsledek.
```

3/ Aproximuj následující body pomocí logaritmu: $\{(1,0), (2,1), (3,4), (5,7), (9,9)\}$. Experimentuj s mocnami logaritmické funkce nebo experimentuj se základem logaritmu. Sleduj jak se křivky mění.

4/ Aproximuj body: $\text{Table}\{x, \sin[x], \{x, 0, 60, 1.0\}\}$ pomocí funkce Sinus. Pokus se rekonstruovat původní funkci sinus, pomocí které byly body vygenerovány.

5/ Samostatně si nastuduj princip aproximační metody nejmenších čtverců, není nutné studovat její odvození a důkaz, ale pronikni do podstaty problému.

Zdroje

<http://reference.wolfram.com/mathematica/ref/Fit.html>

<http://mathworld.wolfram.com/LeastSquaresFitting.html>