

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Číslo projektu	CZ .1 .07 / 1.1 .36 / 02.0066
Autor	Ladislav Kašpárek
Předmět	Programovací metody
Téma	Numerické řešení rovnic
Metodický pokyn	výkladový text s ukázkami

Numerické řešení rovnic

Učebnice a sbírky úloh z matematiky jsou plné různých rovnic, které mají jedno společné: "jdou vypočítat". Má se na mysli, že postupnými algebraickými úpravami (ekvivalentními, neekvivalentními) dospějeme k výsledku. (Někdy je řešení snadné jindy méně...).

Vyzkoušejte si:

Solve $[x^2 - 4x + 2 == 0, x]$

$\{ \{x \rightarrow 2 - \sqrt{2}\}, \{x \rightarrow 2 + \sqrt{2}\} \}$

Solve $[\text{Sin}[2x] == \text{Sin}[x], x]$

$\{ \{x \rightarrow \text{ConditionalExpression}[2\pi C[1], C[1] \in \text{Integers}]\},$
 $\{x \rightarrow \text{ConditionalExpression}[-\frac{\pi}{3} + 2\pi C[1], C[1] \in \text{Integers}]\},$
 $\{x \rightarrow \text{ConditionalExpression}[\frac{\pi}{3} + 2\pi C[1], C[1] \in \text{Integers}]\},$
 $\{x \rightarrow \text{ConditionalExpression}[\pi + 2\pi C[1], C[1] \in \text{Integers}]\} \}$

Reduce $[2^{(x+1)} 3^x == \frac{2}{3}, x, \text{Reals}]$

$x == -\frac{\text{Log}[3]}{\text{Log}[2] + \text{Log}[3]}$

Takovým rovnicím říkáme algebraicky řešitelné (Toto není přesná definice, ale jen zjednodušené vymezení. Definice přesahuje znalosti žáka SŠ).

Úkol

Vezmi si sbírku úloh z matematiky a vyzkoušej pomocí příkazu **Solve** vyřešit alespoň 3 rovnice od každého typu: logaritmické, exponenciální, goniometrické a iracionální. Výsledek vždy interpretuj a porovnej s výsledkem ve sbírce.

Rovnice transcendentální

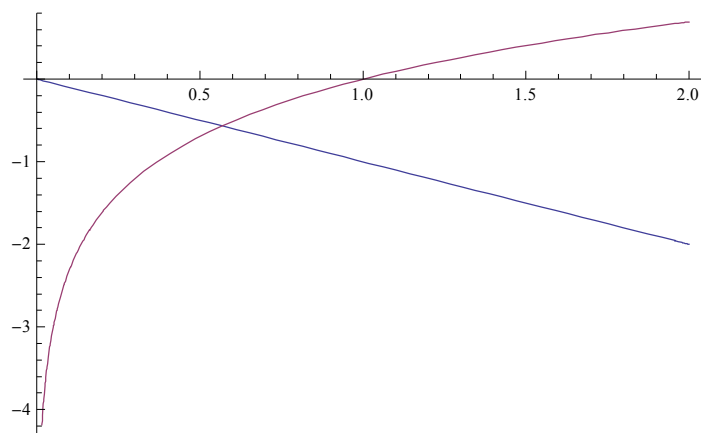
V praxi (tecnické i teoretické) se však daleko častěji setkáváme s rovnicemi, které na první pohled vypadají jednoduše, ale vypočítat je běžnými úpravami nelze. Zpravidla nelze osamostatnit x – neznámou a vyjádřit ji jako algebraický výraz. Takovým rovnicím budeme zjednodušeně říkat transcendentální. Pozn: Často je technici získají řešením tzv. diferenciálních rovnic.

Ukázka: řešte v R rovnici

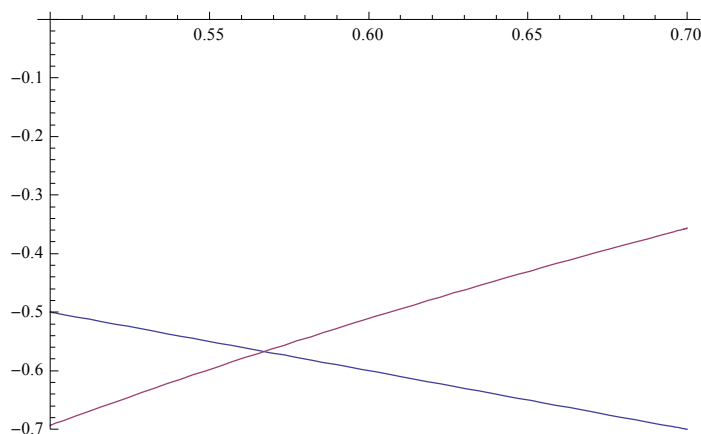
$$\ln x = -x$$

Rovnice vypadá jednoduše, ale vyřešit nelze i když zjevně kořen má, viz následující obrázky.

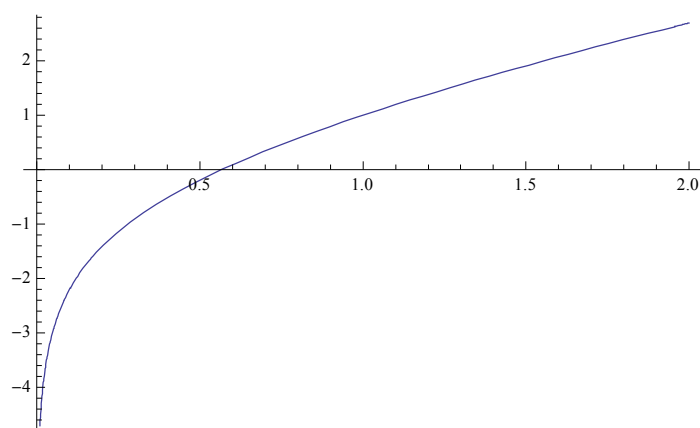
`Plot[{-x, Log[x]}, {x, 0, 2}]`



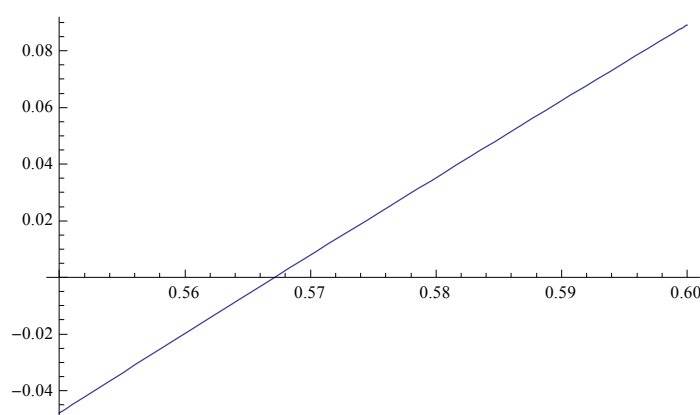
`Plot[{-x, Log[x]}, {x, 0.5, 0.7}, PlotRange -> {- .7, 0}]`



```
Plot[{x + Log[x]}, {x, 0, 2}]
```



```
Plot[{x + Log[x]}, {x, 0.55, 0.6}]
```



Z obrázků je patrné, že kořen rovnice leží někde za jednou polovinou.

Numerické řešení

Rovnice tohoto typu je vhodné řešit pomocí numerických metod, kterých je celá řada a před jejich použitím je vhodné znát jejich princip, aby byla zvolena vhodná pro daný případ. Metody mají svá omezení, svoji přesnost, rychlost a další parametry, které výpočet ovlivňují. Nejčastěji se vyučují tři metody a dvě z nich se reálně používají.

Zde probereme všechny, demonstrovat budeme jen některé a jiné programovat v Javě.

Metoda půlení intervalu: lze použít kdykoliv, ale je pomalá.

Metoda sečen (též někdy označovaná jako regula falsi) je rychlejší, ale někdy ne.

Newtonova metoda tečen je nejrychlejší, ale může za určitých okolností selhat, nelze ji používat kdykoliv.

Wolfram *Mathematica* implicitně používá metodu sečen s rizikem neúspěchu (ono se dá poměrně dobře snížit).

Kdy kde a jak riziko snížit, k tomu jsou potřeba znalosti o tom jak metoda přesně pracuje, porozumějí a pak správně použít.

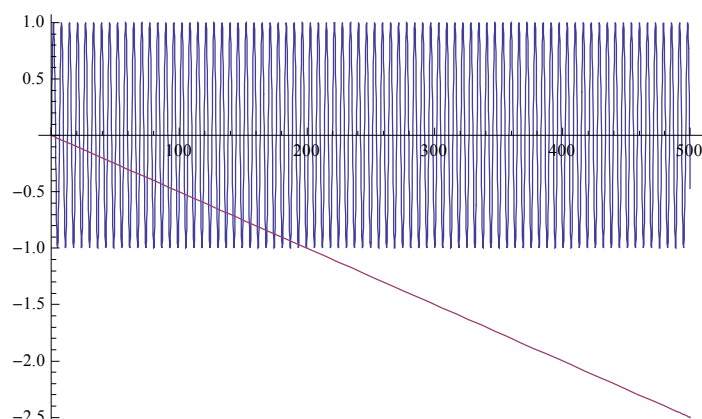
Funkce FindRoot umí metodu tečen (implicitně) i metodu sečen (lze zapnout).

```
FindRoot[Log[x] == -x, {x, .5}]
```

```
{x -> 0.567143}
```

Každá metoda tohoto typu potřebuje “starovací” hodnotu, od které spustí výpočet, ate to je slabina, je-li kořenů víc.

```
Plot[{Sin[x], -0.005 x}, {x, 0, 500}]
```



```
Table[FindRoot[Sin[x] == -0.005 x, {x, a}],
  {a, {1, 2, 3, 5, 7, 10, 20, 50, 100, 200, 300, 500, 800}}]
{ {x -> -2.52435 x 10^-29}, {x -> 3.15738}, {x -> 3.15738}, {x -> 6.25192},
  {x -> 6.25192}, {x -> 9.47216}, {x -> 18.7556}, {x -> 50.0127}, {x -> 100.007},
  {x -> 199.558}, {x -> 149.949}, {x -> 2.52435 x 10^-29}, {x -> -87.5117} }
```

Rozdílné výsledky pro různá nastavení počáteční hodnoty výpočtu.

Shrnutí

1/ Existují rovnice, které nelze běžným algebraickým postupem vyřešit i když řešení mají. Rovnice transcendentální nebo rovnice algebraické 5. a vyššího stupně, pro které nelze najít vzorec pro jejich kořeny.

2/ Tyto rovnice lze řešit numericky, různými metodami, které však mají své výhody a nevýhody. Proto je nutné metody znát, aby je uživatel mohl efektivně používat.

Úlohy

1/ Vyřeš rovnice:

$$x^x = 2x$$

$$\sin x = 0,5$$

$$\sin x = \ln x$$

2/ Vymysli si sám nějakou neřešitelnou rovnici (třeba polynom 6. stupně s kořenem -1), otestuj řešení příkazem Solve, které selže a pak příkazem FindRoot, který řešení nalezne.

Zdroje

<http://reference.wolfram.com/mathematica/ref/FindRoot.html>

<http://mathworld.wolfram.com/NewtonsMethod.html>