



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Číslo projektu	CZ .1 .07/1.1 .36/02.0066
Autor	Markéta Šimová
Předmět	Aplikovaná matematika
Téma	Lineární lomená funkce
Metodický pokyn	výkladový text s ukázkami

Lineární lomená funkce

Lineární lomená funkce je dána předpisem: $f: y = \frac{ax+b}{cx+d}$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $x \neq -\frac{d}{c}$, $ad - bc \neq 0$

Její grafem je hyperbola.

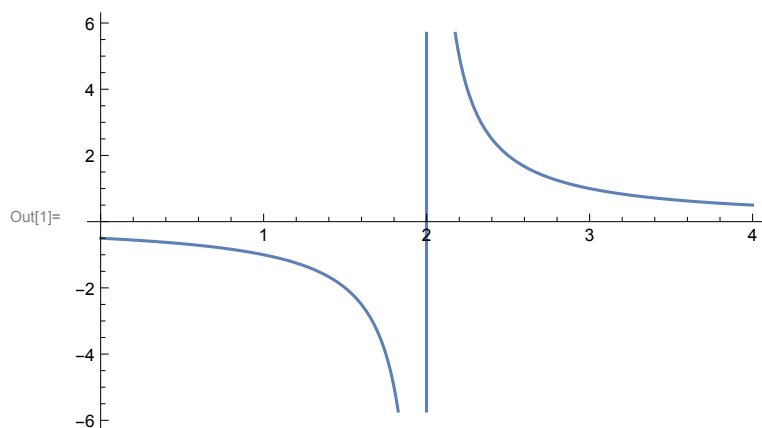
$$D = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}, H = \mathbb{R} - \left\{-\frac{b}{a}\right\}$$

Předpis funkce lze upravit na tvar $y - s_2 = \frac{k}{x - s_1}$, kde $S[s_1, s_2]$ je střed hyperboly, kterým zároveň procházejí asymptoty funkce.

Př. 1: Narýsujte graf funkce $y = \frac{1}{x-2}$

Řešení: grafem je hyperbola se středem $S[2,0]$,
asymptoty jsou přímky $x = 2$, $y = 0$
 $D = \mathbb{R} - \{2\}$, $H = \mathbb{R} - \{0\}$

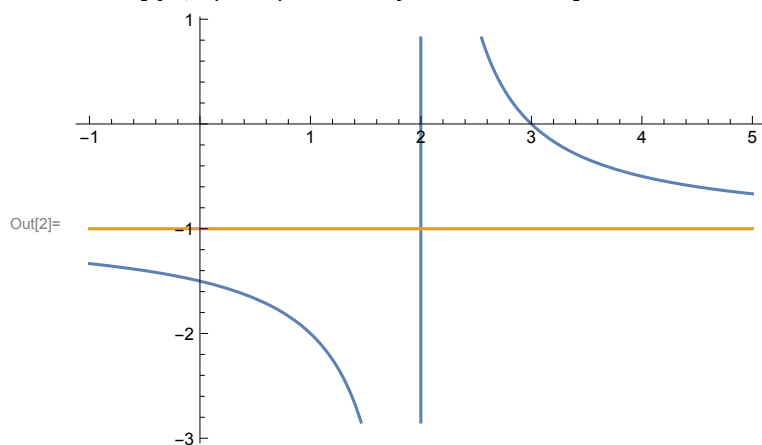
In[1]:= Plot[1/(x-2), {x, 0, 4}]



Př. 2: Narýsujte graf funkce $y = \frac{1}{x-2} - 1$

Řešení: grafem je hyperbola se středem $S[2, -1]$,
asymptoty jsou přímky $x = 2$, $y = -1$
 $D = \mathbb{R} - \{2\}$, $H = \mathbb{R} - \{-1\}$

In[2]:= Plot[{1/(x-2) - 1, -1}, {x, -1, 5}]



Př. 3: Narýsujte graf funkce $y = \frac{x-1}{x-2}$

Řešení: předpis funkce je třeba upravit do tvaru $y - s_2 = \frac{k}{x - s_1}$

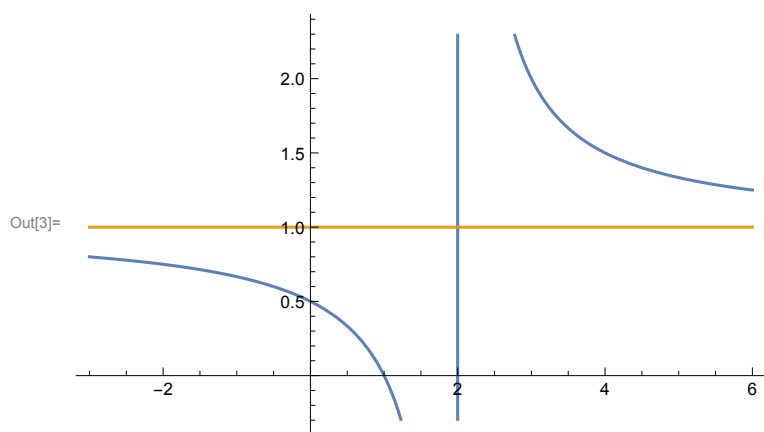
vydělíme čítec zlomku jmenovatelem

$$(x - 1) : (x - 2) = 1 + \frac{1}{x - 2}$$

Předpis funkce je : **f: $y - 1 = \frac{1}{x-2}$** $\Rightarrow S[2, 1]$, asymptoty jsou přímky $x = 2$, $y = 1$

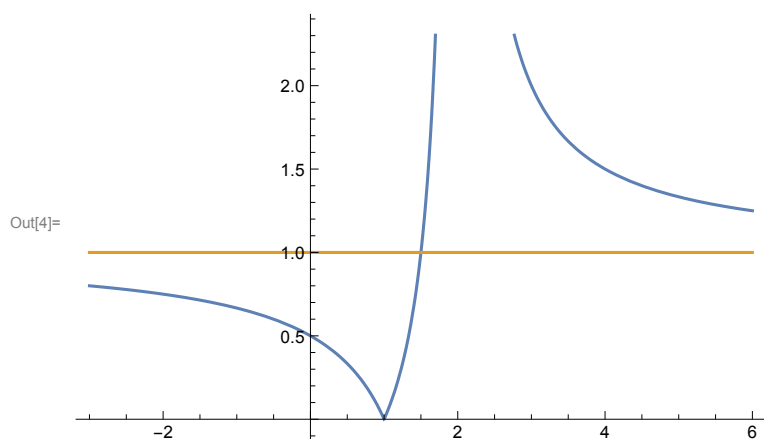
$$D = \mathbb{R} - \{2\}, H = \mathbb{R} - \{1\}$$

In[3]:= Plot[$\left\{\frac{x-1}{x-2}, 1\right\}, \{x, -3, 6\}]$



Př. 4: Narýsujte graf funkce $y = \left| \frac{x-1}{x-2} \right|$

In[4]:= Plot[$\left\{\text{Abs}\left[\frac{x-1}{x-2}\right], 1\right\}, \{x, -3, 6\}]$



Př. 5: Narýsujte graf funkce $y = \frac{2x+1}{x+1}$

Řešení: předpis funkce je třeba upravit do tvaru $y - s_2 = \frac{k}{x - s_1}$

vydělíme čítec zlomku jmenovatelem

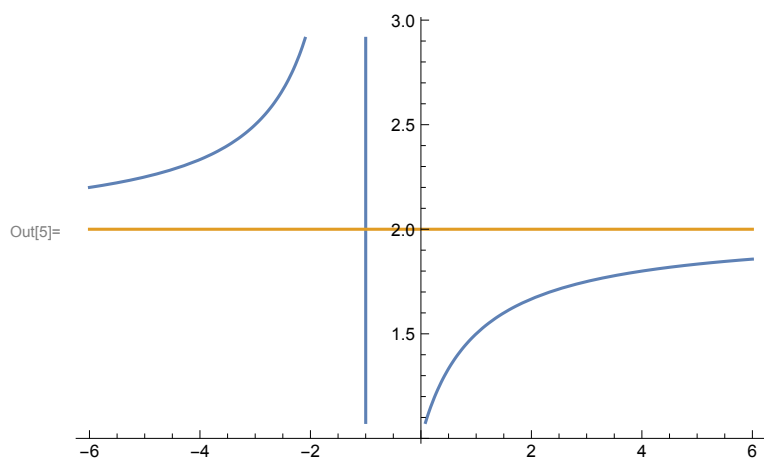
$$(2x + 1) : (x + 1) = 2 + \frac{-1}{x+1}$$

Předpis funkce je : $y - 2 = \frac{-1}{x+1} \Rightarrow S[-1, 2]$, asymptoty jsou přímky $x = -1$, $y = 2$, $k < 0 \Rightarrow$

graf prochází 2. a 4. kvadrantem

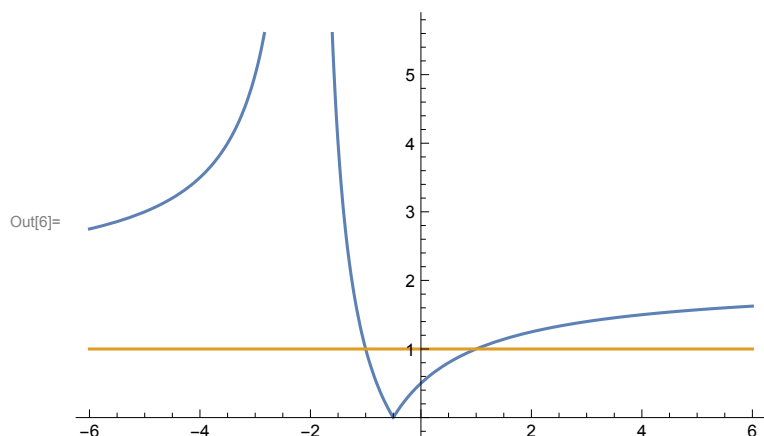
$$D = \mathbb{R} - \{-1\}, H = \mathbb{R} - \{2\}$$

In[5]:= `Plot[{ $\frac{2x+1}{x+1}$ , 2}, {x, -6, 6}]`



Př. 6: Narýsujte graf funkce $y = \left| \frac{2x+1}{x+1} \right|$

In[6]:= `Plot[{Abs[ $\frac{2x+1}{x+1}$ ], 1}, {x, -6, 6}]`



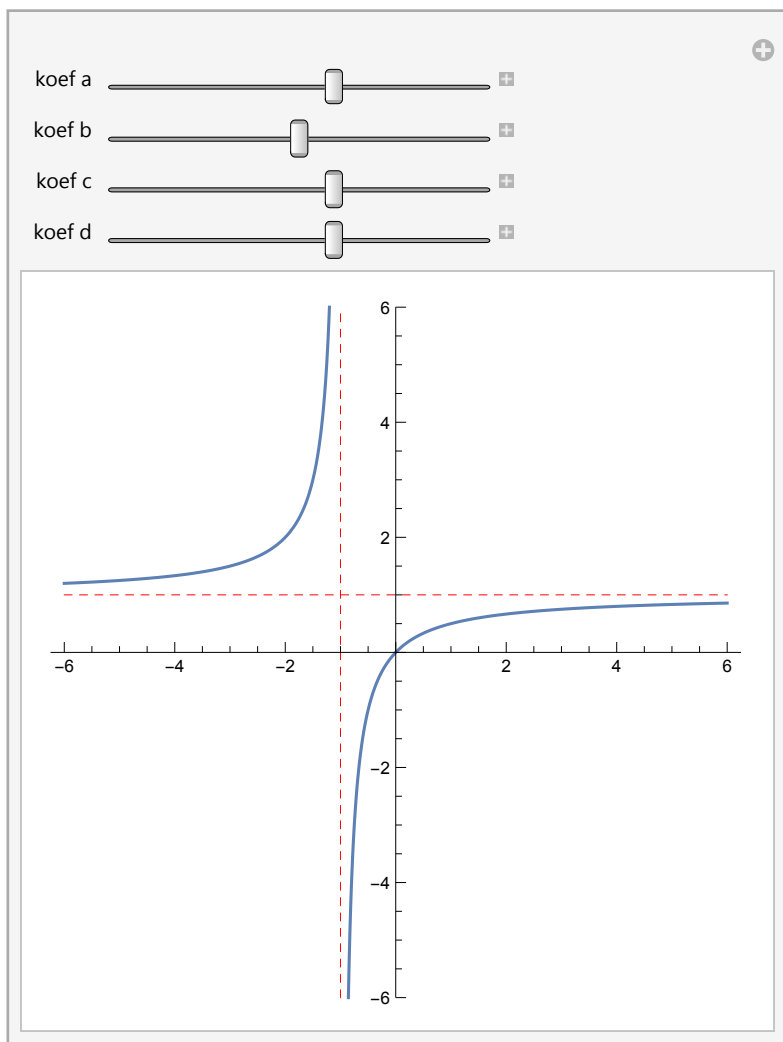
Význam jednotlivých parametrů funkce:

```

In[7]:= Manipulate[
  With[{range = 6}, Show[Plot[ $\frac{a x + b}{c x + d}$ , {x, -range, range}, Exclusions -> {c x + d == 0},
    AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> {-range, range}, AspectRatio -> 1],
    Graphics[{Thin, Dashed, Red, {Line[{{-d / c, -range}, {-d / c, range}}],
      Line[{{-range,  $\frac{a}{c}$ }, {range,  $\frac{a}{c}}$ }}]}],
    {{a, 1, "koef a"}, -5, 5}, {{b, 0, "koef b"}, -5, 5},
    {{c, 1, "koef c"}, -5, 5},
    {{d, 1, "koef d"}, -5, 5}]

```

Out[7]=



Sbírka úloh:

Narýsujte grafy funkcí, určete souřadnice středu a rovnice asymptot. Určete definiční obor a obor hodnot. Vypočtete souřadnice průsečíků grafu funkce s osami souřadnic. Graf zkontrolujte pomocí WM.

1. $y = \frac{x-2}{x+3}$
2. $y = \frac{2x-1}{x+2}$
3. $y = \frac{x}{x+1}$

$$4. y = \frac{-2}{4x-1}$$

$$5. y = \frac{x+3}{x-3}$$

aplikace znalostí:

6. Proč je v definici funkce podmínka $ad - bc \neq 0$? Jaká funkce by při nesplnění této podmínky mohla vzniknout?

7. Užitím grafu nepřímé úměrnosti $y = \frac{1}{x}$ sestrojte grafy lineárních $y = \frac{1}{x} - 2$, $y = \frac{1}{x+3}$, $y = \frac{1}{x-2} + 3$.

Zdroje:

Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách I. Prometheus, Praha, 2006. IBSN 80-7196-337-2